

Prof. Dr. Alfred Toth

Iterationshierarchien bijektiver Abbildungen von Peanozahlen auf Abbildungszahlen

1. Als bekannt vorausgesetzt werden darf die Menge der Peanozahlen

$$P = (1, 2, 3, \dots, n).$$

Bei ihnen wird stets von einer Initialzahl m ausgegangen und diese der Nachfolgerzahl $N(m)$ abgebildet, so zwar, daß die Vorgängerzahl $V(m)$ einer Zahl $(m+1)$ immer nur $V(m)$ ist, also nicht die Menge aller Vorgängerzahlen von $(m+1)$.

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n$$

2. Dagegen ist bei den von Bense (1979, S. 53 u. 67) eingeführten Peircezahlen

$$I = (1, (1, 2), (1, 2, 3), \dots, (1, \dots, n))$$

nur die Initialzahl m eine Einzelzahl, d.h. jedes $V(m)$ von $(m+1)$ enthält stets die Menge aller Vorgängerzahlen von $(m+1)$, so zwar, daß für jede Menge i und ihre Nachfolgermenge $(i+1)$ gilt: $i \subset (i+1)$.

$$1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow \dots$$

Bense sprach auch von "verschachtelten Relationen" bzw. von "Relationen über Relationen" (vgl. dazu Toth 2019a).

3. Die in Toth (2019b) eingeführten Abbildungszahlen

$$A = ((1 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 3), (3 \rightarrow 4), \dots, ((n-1) \rightarrow (n)))$$

zählen nicht die Peanozahlen, sondern ihre Abbildungen aufeinander in der Peanofolge, d.h. sie unterscheiden sich von den Peanozahlen einzig dadurch, daß es keine Initialzahl gibt, die keine Abbildung ist.

$$(1 \rightarrow 2) \rightarrow (2 \rightarrow 3) \rightarrow (3 \rightarrow 4) \rightarrow \dots$$

4. Bemerkenswert ist, daß die Abbildungen von Peanozahlen, Peircezahlen und Abbildungszahlen trotz der aufgezeigten Unterschiede für jedes der drei möglichen Paare bijektiv ist (vgl. Toth 2019c).

4.1. $P \rightarrow I$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & 2 & & \rightarrow & 3 & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & (1 \rightarrow 2) & & \rightarrow & (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

4.2. $P \rightarrow A$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & \rightarrow & 2 & & \rightarrow & 3 & & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\ (1 \rightarrow 2) & & \rightarrow & (2 \rightarrow 3) & & \rightarrow & (3 \rightarrow 4) & & \rightarrow & \dots \end{array}$$

4.3. $I \rightarrow A$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & \rightarrow & (1 \rightarrow 2) & & \rightarrow & (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) & & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\ (1 \rightarrow 2) & & \rightarrow & (2 \rightarrow 3) & & \rightarrow & (3 \rightarrow 4) & & \rightarrow & \dots \end{array}$$

5. Im folgenden zeigen wir die Iterationshierarchie der Abbildung von Peanozahlen auf Abbildungszahlen für die ersten 5 Stufen.

5.1. $I^1(P \rightarrow A) =$

$$(1 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 3), (3 \rightarrow 4)$$

5.2. $I^2(P \rightarrow A) =$

$$((1 \rightarrow (2 \rightarrow (3 \rightarrow 4))) \rightarrow (2 \rightarrow (3 \rightarrow 4))), ((2 \rightarrow (3 \rightarrow 4)) \rightarrow (3 \rightarrow 4)), ((3 \rightarrow 4) \rightarrow 4)$$

5.3. $I^3(P \rightarrow A) =$

$$(((1 \rightarrow (2 \rightarrow (3 \rightarrow 4)))) \rightarrow ((2 \rightarrow (3 \rightarrow 4)) \rightarrow ((3 \rightarrow 4) \rightarrow 4))) \rightarrow ((2 \rightarrow (3 \rightarrow 4)) \rightarrow ((3 \rightarrow 4) \rightarrow 4)), (((2 \rightarrow (3 \rightarrow 4)) \rightarrow ((3 \rightarrow 4) \rightarrow 4)) \rightarrow ((3 \rightarrow 4) \rightarrow 4)), (((3 \rightarrow 4) \rightarrow 4) \rightarrow 4)$$

